INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES
OPTION MATHEMATIQUES

MAI 1991

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
(Durée : 4 heures)

Il sera tenu le plus grand compte de la présentation, de la rigueur du raisonnement et de la clarté des démonstrations.

Les parties IV et V (sauf V-6 et V-7) sont indépendantes des parties I, II et III.

Afin de ne pas alourdir les notations, on sera parfois amené à assimiler un endomorphisme à sa matrice sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En particulier, on parlera de "restriction d'une matrice à un sous-espace vectoriel".

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs et $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ désignent respectivement $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ privés de 0.

Pour n entier et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni d'une structure d'espace vectoriel normé, et $GL_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on note det M le déterminant de M. Pour n entier, I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

Si x est un réel non nul on note sgn(x) la quantité égale à +1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$. Si z est un élément de $\mathbb{C}$ on note $|z|$, le module de z.

Soit A et B deux éléments de $GL_n(\mathbb{R})$, on dira que A est homotope à B si il existe une fonction continue $h : [0,1] \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ telle que $h(0) = A$ et $h(1) = B$.

Soit enfin, $d : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ une application vérifiant les trois propriétés suivantes,

(D1) $d(I_n) = 1$

(D2) d n'est pas constante sur $GL_n(\mathbb{R})$,

(D3) si A est homotope à B alors $d(A) = d(B)$.

PARTIE I : GENERALITES

1) Montrer que la relation "est homotope à" est une relation d'équivalence.

2) Pour n pair, montrer qu'il existe $J_n \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $J_n^2 = -I_n$. Montrer que pour $t \in [0,1]$, $(tI_n + (1-t)J_n) \in GL_n(\mathbb{R})$.

3) Montrer que I_n est homotope à J_n. En déduire que I_n et $-I_n$ sont homotopes.

4) Montrer que si A est homotope à B alors det A et det B sont de même signe.

Tournez la page S.V.P.

5) Pour $n = 1$, déterminer toutes les applications vérifiant les propriétés (D1) et (D3).

PARTIE II : CARACTERISATION DU DEGRE

1) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, soit α le nombre de valeurs propres négatives de A comptées avec leur ordre de multiplicité, montrer qu'il existe deux sous espaces vectoriels M et N supplémentaires, stables par A, tels que la restriction de A à M n'a pas de valeurs propres négatives et dim $N = \alpha$.

2) Montrer que $\text{sgn}(\det A) = (-1)^\alpha$ et que si $M = \mathbb{R}^n$ alors $d(A) = 1$.

3) Soit P_1 la matrice de la projection sur N parallèlement à M et P_2 la matrice de la projection sur M parallèlement à N. Montrer que A est homotope à $-P_1 + P_2$.

4) On suppose $\alpha = 2p$.

a) Montrer qu'il existe $J \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que la restriction $J|_N$ de J à N, vérifie $(J|_N)^2 = -I_\alpha$.

b) Montrer que A est homotope à $J P_1 + P_2$ puis à $P_1 + P_2$. En déduire que $d(A) = 1$.

5) On suppose que $\alpha = 2p + 1$.

a) Soit N_1 un sous espace de N de dimension 1 et N_2 un supplémentaire de N_1 dans N. Soient $\tilde{Q}_1$ la projection sur N_1 parallèlement à $N_2 + M$, $\tilde{Q}_2$ la projection sur N_2 parallèlement à $N_1 + M$ et Q_2 la projection sur $N_2 + M$ parallèlement à N_1. Montrer que $P_1 = \tilde{Q}_1 P_1 + \tilde{Q}_2 P_1$, $Q_2 = \tilde{Q}_2 P_1 + P_2$ et que $\tilde{Q}_1 + Q_2 = I_n$.

b) Soit $\tilde{J} \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $\left(\tilde{J}|_{N_2}\right)^2 = -I_{2p}$. Montrer que A est homotope à $-\tilde{Q}_1 P_1 + \tilde{J}\tilde{Q}_2 P_1 + P_2$ puis à $-\tilde{Q}_1 P_1 + \tilde{Q}_2 P_1 + P_2$.

c) En déduire que $d(A) = d\left(-\tilde{Q}_1 + Q_2\right)$.

d) Soit $\tilde{d} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, par $\tilde{d}(\lambda) = d\left(\lambda\tilde{Q}_1 + Q_2\right)$. En identifiant $\mathbb{R}^*$ à $GL_1(\mathbb{R})$, montrer que $\tilde{d}$ vérifie les hypothèses (D1) et (D3).

PARTIE III : MORPHISMES DE $GL_n(\mathbb{R})$ DANS $\mathbb{Z}$

Ici, on suppose de plus que d est un morphisme ; c'est-à-dire vérifie la propriété :

(D4) pour A et B dans $GL_n(\mathbb{R})$, $d(AB) = d(A)d(B)$.

1) Montrer que l'application $\tilde{d}$ de II vérifie (D4).

2) Montrer que si C et D sont deux matrices semblables de $GL_n(\mathbb{R})$ alors $d(C) = d(D)$.

3) En reprenant les notations de II-5), montrer que $-\tilde{Q}_1 + Q_2$ est semblable à une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1 sauf un qui vaut -1.

4) Montrer que $\tilde{d}$ vérifie (D2) et trouver $\tilde{d}$.

5) Montrer que l'on a alors pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $d(A) = \text{sgn}(\det A)$.

A SUIVRE

6) Soit f une fonction continue de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{Z}$, montrer que f vérifie (D3). En déduire tous les morphismes continus de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{Z}$.

PARTIE IV : MORPHISMES DE $\mathbb{C}^*$ DANS $\mathbb{R}_+^*$

Dans cette partie on considère une application $h : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue, telle que pour tout couple $(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$ on a $h(zz') = h(z)h(z')$.

1) Calculer $h(1)$ puis, pour n entier, l'image par h des racines n-èmes de l'unité.

2) Soit alors $\tilde{h}$ la restriction de h à $\mathbb{R}_+^*$, montrer que pour tout $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi]$, $h(\rho e^{i\theta}) = \tilde{h}(\rho)$.

3) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $\lambda \in \mathbb{R}$ par $g(\lambda) = \log(\tilde{h}(e^{\lambda}))$. Vérifier que g est continue et que pour tout couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $g(\lambda + \mu) = g(\lambda) + g(\mu)$.

4) Pour n entier, puis entier relatif, calculer $g(n)$ en fonction de $g(1)$. Généraliser ce résultat aux rationnels puis aux réels.

5) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $h(z) = |z|^{\alpha}$.

PARTIE V : MORPHISMES DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ DANS $\mathbb{K}$

Soit $\varphi : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une application continue telle que pour tout couple (A,B) dans $(GL_n(\mathbb{C}))^2$, on a $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$.

1) Montrer que si A et B sont semblables alors $\varphi(A) = \varphi(B)$.

2) Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\varphi(zI_n) = |z|^{n\beta}$.

3) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale (on notera $A = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$), montrer que $\varphi(A) = |\det A|^{\beta}$ (on pourra calculer l'image par φ du produit suivant

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\mathrm{diag}(\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\lambda_1)\ldots\mathrm{diag}(\lambda_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})\,.)$$

4) Généraliser le résultat précédent aux matrices diagonalisables de $GL_n(\mathbb{C})$, puis à tout $GL_n(\mathbb{C})$.

5) On considère à présent une application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, non identiquement nulle et telle que pour tout couple (A,B) dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, on a $\psi(AB) = \psi(A)\psi(B)$.

Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|\psi(A)| = |\det A|^{\beta}$. (Par convention, on pose que $0^0 = 1$) .

6) On suppose que la restriction de ψ à $GL_n(\mathbb{R})$ est à valeurs réelles et l'on pose, pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $d^*(A) = \mathrm{sgn}(\psi(A))$. Vérifier que d^* ainsi définie vérifie les propriétés (D1), (D3) et (D4) .

7) Montrer que l'on a alors soit,

pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\psi(A) = |\det A|^{\beta}$,

soit,

pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\psi(A) = \mathrm{sgn}(A)|\det A|^{\beta}$.

FIN